УДК 517.983, 519.21

О. Ю. Азанова

РЕШЕНИЕ АБСТРАКТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С ГЕНЕРАТОРОМ R-ПОЛУГРУППЫ*

1. Введение

Многие задачи, возникающие в физике, биологии, экономике и других областях, приводят к решению стохастических эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве H

$$u'(t) = Au(t) + B\,\mathcal{W}(t), \quad t \in [0, T), \quad T \leqslant \infty, \quad u(0) = \xi,$$

где A и B – линейные операторы в H, а $\{\mathcal{W}(t),\, t \geqslant 0\}$ – H-значный стохастический процесс с независимыми случайными величинами $\mathcal{W}(t)$ при различных t и, как следствие, не являющийся непрерывным. Такой процесс с конечной дисперсией в конечномерном случае называется белым шумом. Для решения стохастических задач в конечномерном случае используется теория, разработанная Ито (см., например, [1]), где вместо дифференциального уравнения решается интегральное с броуновским движением, которое является «первообразной» белого шума и имеет непрерывную версию.

В монографии [2] этот подход продолжен на бесконечномерный случай для задачи

$$du(t) = Au(t)dt + BdW(t), \quad t \in [0, T), \quad T \leqslant \infty, \quad u(0) = \xi, \tag{1}$$

где $\{W(t),\, t \geqslant 0\}$ – бесконечномерный аналог броуновского движения, называемый Q-винеровским процессом, а оператор A является генератором полугруппы класса C_0. Выбор такого оператора обусловлен тем, что задача Коши для однородного уравнения с генератором полугруппы класса C_0 является равномерно корректной, а решение задачи (1) строится через решение соответствующей однородной задачи.

Однако существует широкий класс уравнений, операторы которых не порождают полугруппу класса C_0, но порождают некоторое более общее семейство – R-полугруппу. Например, для важного класса дифференциальных

*Работа поддержана РФФИ (грант № 03-01-00310).

© О. Ю. Азанова, 2006

систем, корректных по Петровскому, в частности гиперболических и параболических, соответствующие операторы-матрицы в общем случае не порождают полугруппу класса C_0 [3, 4]. Однако, как показано в [5], эти операторы и даже операторы, соответствующие условно корректным системам, порождают R-полугруппы с различными операторами R.

Настоящая работа посвящена решению стохастической задачи (1) в случае, когда A является генератором R-полугруппы. В разделе 2 дано определение R-полугруппы и доказано необходимое для исследования стохастической задачи (1) утверждение о том, что семейство операторов, сопряженных к R-полугруппе, является R^*-полугруппой. В разделе 3 приведены необходимые определения и сведения из теории бесконечномерных процессов. В разделе 4 получен основной результат – построено (слабое) решение задачи (1). В разделе 5 найдены вероятностные характеристики решения.

2. Определение R-полугрупп. Свойство сопряженных полугрупп в гильбертовом пространстве

Как было отмечено выше, для решения стохастической задачи (1) используется решение однородной задачи Коши

$$u'(t) = Au, \quad t \geqslant 0, \quad u(0) = \xi. \tag{2}$$

Для исследования задачи (1) с оператором A, не являющимся генератором полугруппы класса C_0, в настоящей работе будут использованы R-полугруппы – семейства операторов, более общие, чем операторы решения задачи (2). Определение R-полугрупп, как обобщение определения полугрупп класса C_0, дается через полугрупповое соотношение [6] или через уравнение, которому эта полугруппа удовлетворяет [7, 8].

Пусть R – линейный ограниченный обратимый оператор с плотной областью значений.

Определение 1. Сильно непрерывное семейство линейных ограниченных операторов $\{S(t),\, t \in [0,T)\}$ в банаховом пространстве называется *R-полугруппой*, если выполняются следующие условия: $S(t_1+t_2)R = S(t_1)S(t_2)$ для всех $t_1, t_2 \in [0,T)$, $S(0) = R$. Если при этом $T < \infty$, то $\{S(t),\, t \in [0,T)\}$ называется *локальной R-полугруппой.*

Инфинитезимальным оператором R-полугруппы называется оператор G, определенный следующим образом:

$$Gf := \lim_{t \to 0} \frac{S(t)R^{-1} - I}{t} f,$$

$$\operatorname{dom} G := \left\{ f \in \operatorname{ran} R: \ \lim_{t\to 0} \frac{S(t)R^{-1} - I}{t} f \ \ \text{существует} \right\}.$$

Генератором R-полугруппы называется замыкание оператора $G: A := \overline{G}$. Если при этом $T < \infty$, то $\{S(t),\ t \in [0,T)\}$ называется *локальной R-полугруппой.*

Определение 2. Пусть $\{S(t),\, t \in [0,T)\}$ – сильно непрерывное семейство линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве X, A – замкнутый оператор с плотной областью определения. Тогда, если выполняются равенства

$$S(t)x - Rx = \int_0^t S(s)Ax\,ds, \quad AS(t)x = S(t)Ax, \quad t \in [0,T), \quad x \in \operatorname{dom} A, \tag{3}$$

то $\{S(t),\, t \in [0,T)\}$ называется *R-полугруппой*, а A – ее *генератором.* Если при этом $T < \infty$, то $\{S(t),\, t \in [0,T)\}$ называется *локальной R-полугруппой.*

В общем случае эти определения не эквивалентны, и выбор одного из них при исследовании задач Коши зависит от постановки и целей изучаемой задачи. В настоящей работе будем использовать определение 2. Благодаря выбору этого определения удалось доказать результат о поведении сопряженной полугруппы и ее генератора в гильбертовом пространстве, необходимый нам для исследования стохастической задачи Коши.

Теорема 1. *Пусть A – генератор локальной R-полугруппы $\{S(t),\ t \in [0,T)\}$ в гильбертовом пространстве H. Тогда семейство $\{S^*(t),\ t \in [0,T)\}$ является локальной R^*-полугруппой с генератором A^*.*

Доказательство. Поскольку сопряженный к ограниченному оператор всегда ограничен, то оператор R^* и операторы $S^*(t)$ для каждого t являются ограниченными. Теперь, чтобы доказать, что семейство ограниченных операторов $\{S^*(t),\, t \in [0,T)\}$ образует R^*-полугруппу с генератором A^*, докажем сначала, что оператор A^* замкнут и плотно определен, R^* – обратимый оператор с плотной областью значений, а семейство $\{S^*(t),\, t \in [0,T)\}$ является сильно непрерывным по t, а затем проверим соотношения (3) для $S^*(t)$ и A^*.

Оператор A^* замкнут как любой сопряженный оператор. Для замкнутого плотно определенного оператора область определения сопряженного оператора также плотна, т. е. $\overline{\operatorname{dom} A^*} = H$ [9]. Обратимость оператора R^* следует из обратимости оператора R. Кроме того, для любого ограниченного оператора R имеет место равенство $(\ker R)^\perp = \overline{\operatorname{ran} R^*}$ [11], а поскольку R обратим, т. е. $\ker R = \{0\}$, то $\overline{\operatorname{ran} R^*} = H$. Коммутируемость операторов $S^*(t)$, $t \in [0,T)$ с оператором A^* на $\operatorname{dom} A^*$ следует из коммутируемости операторов $S(t)$ с A.

Для доказательства сильной непрерывности семейства $\{S^*(t),\, t\in[0,T)\}$ и равенства

$$S(t)^*y - R^*y = \int_0^t S^*(s)A^*y\,ds \quad \text{для всех } y\in \operatorname{dom} A^* \tag{4}$$

умножим скалярно первое из равенств (3) на $y\in\operatorname{dom}A^*$. Получим

$$\langle S(t)x, y\rangle - \langle Rx, y\rangle = \langle x, S(t)^*y - R^*y\rangle = \left\langle \int_0^t S(s)Ax\,ds, y\right\rangle. \tag{5}$$

В силу непрерывности скалярного произведения из равенства (5) следует

$$\langle x, S(t)^*y - R^*y\rangle = \int_0^t \langle S(s)Ax, y\rangle\,ds = \tag{6}$$
$$= \int_0^t \langle S(s)x, A^*y\rangle\,ds, \quad x\in\operatorname{dom}A, \quad y\in\operatorname{dom}A^*.$$

В силу плотности $\operatorname{dom}A$ по теореме Лебега равенство (6) можно продолжить для $x\in X$. Продифференцируем продолженное равенство. Учитывая непрерывность по s $\{S(s)x,\, s\in[0,T)\}$, $x\in X$, получим

$$\frac{d}{dt}\langle x, S^*(t)y\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\langle x, \frac{S^*(t+\Delta t)-S^*(t)}{\Delta t}y\rangle = \tag{7}$$
$$= \langle S(t)x, A^*y\rangle, \quad x\in X, \quad y\in\operatorname{dom}A^*.$$

Докажем, что отсюда следует непрерывность по t семейства $\{S^*(t), t\in[0,T)\}$ на $\operatorname{dom}A^*$. От противного: предположим, что в некоторой точке t_0 на элементе $y_0\in\operatorname{dom}A^*$ нет сильной непрерывности, т. е.

$$\exists\, a>0\ \forall\,\delta>0\ \exists\,\Delta t<\delta \quad \|S^*(t_0+\Delta t)y_0 - S^*(t_0)y_0\| > a. \tag{8}$$

Тогда $F(\Delta t) := \left\|\dfrac{S^*(t_0+\Delta t)-S^*(t_0)}{\Delta t}y_0\right\|$ неограничена при $\Delta t\to 0$, что противоречит слабой сходимости (7). Таким образом, семейство $\{S^*(t), t\in[0,T)\}$ непрерывно по t на всюду плотном множестве $\operatorname{dom}A^*$, отсюда по теореме Банаха–Штейнгауза получаем сильную непрерывность семейства $\{S^*(t), t\in[0,T)\}$.

Для завершения доказательства остается показать равенство (4). Для этого преобразуем равенство (6), с учетом коммутируемости на $\operatorname{dom}A^*$ операторов $S^*(s)$ с A^* получаем

$$\langle x, S(t)^*y - R^*y\rangle = \int_0^t \langle S(s)Ax, y\rangle\,ds =$$
$$= \int_0^t \langle x, A^*S^*(s)y\rangle\,ds = \int_0^t \langle x, S^*(s)A^*y\rangle\,ds, \quad y\in\operatorname{dom}A^*.$$

Поскольку семейство $\{AS(s),\, s \in [0,T)\}$ является сильно непрерывным, интеграл можно внести под знак скалярного произведения:

$$\langle x, S(t)^*y - R^*y\rangle = \left\langle x, \int_0^t S^*(s)A^*y\, ds \right\rangle, \quad x \in \operatorname{dom} A,\ y \in \operatorname{dom} A^*.$$

Поскольку $\operatorname{dom} A$ – всюду плотное множество, имеет место равенство (4).

3. Необходимые сведения из теории бесконечномерных процессов

Следуя [2, 10], дадим определения и сведения из теории стохастических процессов на бесконечномерном пространстве, необходимые для дальнейшего изложения. Будем рассматривать вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и гильбертово пространство H с определенной на нем борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(H)$. Как и в конечномерном случае, под случайной величиной будем понимать такое отображение $u\colon \Omega \to H$, что для любого $G \in \mathcal{B}(H)$ множество $\{\omega \in \Omega\colon u(\omega) \in G\}$ принадлежит $\mathcal{F}$. Закон распределения случайной величины u также определяется аналогично конечномерному случаю, будем обозначать его $\mathcal{L}_u[G]$.

Введем пространства бесконечномерных случайных величин, для которых возможно определение вероятностных характеристик: пусть $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$, $p \geqslant 1$, пространство всех классов эквивалентности H-значных случайных величин, определенных на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и таких, что

$$\int_\Omega \|u(\omega)\|_H^p P(d\omega) < \infty \quad \text{с нормой} \quad \|u\|_p := \left(\int_\Omega \|u(\omega)\|_H^p P(d\omega)\right)^{1/p}.$$

Определения характеристик для случайных величин, являющихся элементами этих пространств, несколько отличаются от конечномерного случая. Математическое ожидание является не вектором, а элементом гильбертова пространства, а вместо дисперсии появляется ковариационный оператор. *Математическим ожиданием* случайной величины $u \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$ называется элемент пространства H, определяемый интегралом Бохнера

$$\mathbf{E}[u] := \int_\Omega u(\omega)\, P(d\omega).$$

Ковариационный оператор случайной величины $u \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$ для любого $h \in H$ определяется соотношением

$$\mathbf{Cov}[u]h := \mathbf{E}[(u - \mathbf{E}[u]) \otimes (u - \mathbf{E}[u])h],$$

где линейный оператор $h_1 \otimes h_2$ для любых $h_1, h_2 \in H$ определяется равенством

$$(h_1 \otimes h_2)h := h_1 \langle h_2, h \rangle, \quad h \in H.$$

Для любого $u \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$ ковариационный оператор $\mathbf{Cov}[u]$ является симметрическим неотрицательным оператором следа.

Для определения бесконечномерного аналога броуновского движения необходимо ввести определение гауссовой меры на бесконечномерном пространстве: мера μ на $(H, \mathcal{B}(H))$ называется *гауссовой*, если для любого $h \in H$ существуют $m_h \in \mathbb{R}$ и $q_h > 0$ такие, что

$$\mu\{x \in H : \langle h, x \rangle \in F\} = \mathcal{N}(m_h, q_h)(F), \quad F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Здесь $\mathcal{N}(m_h, q_h)$ – закон распределения действительно-значной гауссовой случайной величины с математическим ожиданием m_h и ковариацией q_h.

В определении гауссовой меры фигурируют характеристики, определенные для каждого $h \in H$. В [2] доказано, что для любой гауссовой меры μ на $(H, \mathcal{B}(H))$ существуют $m \in H$ и симметрический неотрицательный оператор $Q \in \mathcal{L}(H)$ такие, что

$$\langle m, h \rangle = \int_H \langle h, x \rangle \mu(dx), \quad h \in H, \tag{9}$$

$$\langle Qh_1, h_2 \rangle = \int_H \langle h_1, x \rangle \langle h_2, x \rangle \mu(dx) - \langle m, h_1 \rangle \langle m, h_2 \rangle, \quad h_1, h_2 \in H. \tag{10}$$

Элемент m, определяемый равенством (9), называется *математическим ожиданием* меры μ, а оператор Q, определяемый равенством (10), – *ковариационным оператором* меры μ. Такая мера будет обозначаться $\mathcal{N}(m, Q)$.

Поскольку ковариационный оператор является оператором следа, то он не может быть единичным оператором. Значит, в бесконечномерном случае невозможно ввести определение броуновского движения таким образом, чтобы оно удовлетворяло основному свойству конечномерного броуновского движения: иметь закон распределения $\mathcal{N}(0, tI)$. Поэтому вместо броуновского движения вводится Q-винеровский процесс.

Определение 3. Пусть Q – симметрический неотрицательный оператор следа в пространстве H. H-значный стохастический процесс $\{W(t),\, t \geqslant 0\}$ называется *Q-винеровским процессом*, если

(W1) $W(0) = 0$ почти наверное;

(W2) процесс $\{W(t),\, t \geqslant 0\}$ имеет независимые приращения;

(W3) закон распределения $\mathcal{L}_{[W(t)-W(s)]} = \mathcal{N}(0, (t-s)Q)$, $0 \leqslant s \leqslant t$;

(W4) процесс $\{W(t),\, t \geqslant 0\}$ имеет непрерывные траектории почти наверное.

4. Постановка задачи. Построение слабого решения

Рассмотрим стохастическую задачу Коши (1):

$$du(t) = Au(t)dt + BdW(t), \quad t \in [0, T),\ T \leqslant \infty, \qquad u(0) = \xi,$$

где A — генератор некоторой локальной R-полугруппы в гильбертовом пространстве H; $\{W(t),\, t \geqslant 0\}$ – Q-винеровский процесс со значениями в H; $B \in \mathcal{L}(H)$ и ξ – H-значная случайная величина.

Поскольку существование сильного решения даже в случае полугруппы класса C_0 требует ограниченности оператора A (более того, он должен быть оператором Гильберта–Шмидта [2]), для рассматриваемой нами задачи (1) с генератором R-полугруппы будем строить слабое решение [2].

Определение 4. H-значный процесс $\{u(t),\ t \in [0, T)\}$ называется *слабым решением* задачи (1), если

(a) $\displaystyle\int_0^T \|u(t)\|_H\, dt < \infty$ п. н.;

(b) для любых $y \in \operatorname{dom} A^*$, $t \in [0, T)$ имеет место равенство

$$\langle u(t), y\rangle = \langle \xi, y\rangle + \int_0^t \langle u(s), A^* y\rangle\, ds + \langle BW(t), y\rangle \quad \text{п. н.} \tag{11}$$

Пусть в стохастической задаче (1) оператор A является генератором R-полугруппы. Покажем, что в этом случае слабое решение (1) задается суммой процесса $\{S(t)R^{-1}\xi,\ t \in [0, T)\}$, являющегося решением соответствующей однородной задачи Коши с начальным условием ξ, и стохастического интеграла специального вида

$$W_A(t) := \int_0^t S(t-s)R^{-1}B\, dW(s), \quad t \in [0, T), \tag{12}$$

являющегося частным решением неоднородной задачи Коши. Интеграл (12) по аналогии со случаем C_0-полугрупп мы будем называть *стохастической сверткой.*

Теорема 2. *Пусть A – генератор локальной R-полугруппы $\{S(t),\ t \in [0, T)\}$, $T \leqslant \infty$, оператор B такой, что $R^{-1}B$ ограниченный, а $S(t)R^{-1}B$ при любом $t \geqslant 0$ – оператор Гильберта–Шмидта и $\displaystyle\int_0^T \|S(t)R^{-1}B\|_{GS}^2\, dt < \infty$. Тогда для $\xi \in \operatorname{ran} R$ п. н. процесс*

$$u(t) = S(t)R^{-1}\xi + \int_0^t S(t-s)R^{-1}B\, dW(s), \quad t \in [0, T), \tag{13}$$

является слабым решением задачи (1).

Доказательство. Чтобы доказать равенство (11), возьмем произвольные $t \in [0,T)$, $y \in \operatorname{dom} A^*$ и рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle u(s), A^*y\rangle\,ds = \int_0^t \langle S(s)R^{-1}\xi, A^*y\rangle\,ds + \\ + \int_0^t \left\langle \int_0^s S(s-r)R^{-1}B\,dW(r), A^*y\right\rangle ds =: I_1 + I_2.\end{aligned} \tag{14}$$

Преобразуем слагаемое I_1. Учитывая определение сопряженного к $S(s)$ оператора, непрерывность R^*-полугруппы $\{S^*(t),\, t \in [0,T)\}$ и непрерывность скалярного произведения, получаем

$$I_1 = \int_0^t \langle R^{-1}\xi, S^*(s)A^*y\rangle\,ds = \left\langle R^{-1}\xi, \int_0^t S^*(s)A^*y\,ds\right\rangle, \quad y \in \operatorname{dom} A^*.$$

Далее, учитывая уравнение (4) для R^*-полугруппы, полученное в теореме 1, имеем

$$\begin{aligned}I_1 &= \langle R^{-1}\xi, S^*(t)y - R^*y\rangle = \\ &= \langle S(t)R^{-1}\xi, y\rangle - \langle RR^{-1}\xi, y\rangle = \langle S(t)R^{-1}\xi, y\rangle - \langle \xi, y\rangle, \quad y \in \operatorname{dom} A^*.\end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$\int_0^t \langle S(s)R^{-1}\xi, A^*y\rangle\,ds = \langle S(t)R^{-1}\xi, y\rangle - \langle \xi, y\rangle, \quad y \in \operatorname{dom} A^*.$$

Таким образом, первое слагаемое формулы (13) $S(t)R^{-1}\xi$ является (п. н., так как $\xi \in \operatorname{ran} R$ п. н.) решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (11).

Теперь преобразуем слагаемое I_2 и покажем, что стохастическая свертка удовлетворяет уравнению (11). Согласно стохастической теореме Фубини [2] из условия $\int_0^T \|S(t)R^{-1}B\|_{GS}^2\,dt < \infty$ следует

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_0^t \left\langle \int_0^s S(s-r)R^{-1}B\,dW(r), A^*y\right\rangle ds = \\ &= \left\langle \int_0^t \int_0^s S(s-r)R^{-1}B\,dW(r)\,ds, A^*y\right\rangle = \\ &= \left\langle \int_0^t \int_r^t S(s-r)R^{-1}B\,ds\,dW(r), A^*y\right\rangle.\end{aligned}$$

Распишем I_2 по определению стохастического интеграла как предел интегральных сумм и, пользуясь непрерывностью скалярного произведения, получим

$$I_2 = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\int_{r_m}^{t} S(s-r_m)R^{-1}Bds \right) \left(W(r_{m+1}) - W(r_m) \right), A^* y \right\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left\langle \left(\int_{r_m}^{t} S(s-r_m)R^{-1}Bds \right) \left(W(r_{m+1}) - W(r_m) \right), A^* y \right\rangle .$$

Поскольку оператор $\int_{r_m}^{t} S(s-r_m)R^{-1}Bds$ ограничен, то существует сопряженный к нему оператор:

$$I_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left\langle W(r_{m+1}) - W(r_m), \left(\int_{r_m}^{t} S(s-r_m)R^{-1}Bds \right)^* A^* y \right\rangle .$$

Из ограниченности оператора $S(s-r_m)R^{-1}B$ следует существование интеграла $\int_{r_m}^{r} \Big(S(s-r_m)R^{-1}B \Big)^* ds$ и равенство

$$\left(\int_{r_m}^{t} S(s-r_m)R^{-1}Bds \right)^* = \int_{r_m}^{t} \big(S(s-r_m)R^{-1}B \big)^* ds.$$

Отсюда

$$I_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left\langle W(r_{m+1}) - W(r_m), \left(\int_{r_m}^{t} (R^{-1}B)^* S^*(s-r_m)\, ds \right) A^* y \right\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left\langle W(r_{m+1}) - W(r_m), \int_{r_m}^{t} (R^{-1}B)^* S^*(s-r_m) A^* y\, ds \right\rangle .$$

Так как оператор A^* является генератором для полугруппы $S^*(t)$, то

$$I_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left\langle W(r_{m+1}) - W(r_m), \int_{r_m}^{t} \frac{d}{ds} \big((R^{-1}B)^* S^*(s-r_m) y \big)\, ds \right\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left\langle W(r_{m+1}) - W(r_m), \big[(R^{-1}B)^* S^*(s-r_m) y \big]_{r_m}^{t} \right\rangle .$$

Учитывая равенство $S(0) = R$, получаем

$$I_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \langle \big(S(t-r_m)R^{-1}B - S(0)R^{-1}B \big) \left(W(r_{m+1}) - W(r_m) \right), y \rangle =$$

$$= \left\langle \int_0^t \big(S(t-r)B - RR^{-1}B \big)\, dW(r), y \right\rangle = \langle W_A(t), y \rangle - \langle BW(t), y \rangle .$$

Подставим найденные для интегралов I_1, I_2 выражения в равенство (14), получаем равенство (11) п. н.

$$\int_0^t \langle u(s), A^*y\rangle\, ds = I_1 + I_2 =$$
$$= \langle S(t)\xi, y\rangle - \langle \xi, y\rangle + \langle W_A(t), y\rangle - \langle BW(t), y\rangle =$$
$$= \langle u(t), y\rangle - \langle \xi, y\rangle - \langle BW(t), y\rangle.$$

Замечание. В работе [6] изучена связь R полугрупп с решением однородной задачи Коши в банаховом пространстве. Показано, что сильное решение однородной задачи Коши с начальными данными ξ существует и единственно при условии $\xi \in R(\operatorname{dom} A)$. В теореме 2, рассматривая слабое решение стохастической задачи, мы смогли ослабить это условие до $\xi \in \operatorname{ran} R$. При этом стохастическая свертка является слабым решением неоднородного уравнения (11) в силу условий, наложенных на оператор B.

5. Характеристики слабого решения задачи Коши

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *и пусть случайная величина* $R^{-1}\xi \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$. *Тогда слабое решение задачи* (1) *имеет следующие характеристики для каждого момента времени* $t \in [0, T)$*:*

$$\mathbf{E}[u(t)] = S(t)\,\mathbf{E}[R^{-1}\xi], \tag{15}$$

$$\mathbf{Cov}[u(t)] = S(t)\,\mathbf{Cov}[R^{-1}\xi]S^*(t) + \int_0^t [S(t-s)R^{-1}B]Q[S(t-s)R^{-1}B]^* ds. \tag{16}$$

Доказательство. Для краткости положим $K(s) := S(t-s)R^{-1}B$, тогда стохастическая свертка $W_A(t) = \int_0^t K(s)\, dW(s)$.

Вычислим математическое ожидание

$$\mathbf{E}[W_A(t)] = \mathbf{E}\Big[\int_0^t K(s)\, dW(s)\Big] = \int_0^t K(s)\,\mathbf{E}[dW(s)] = 0.$$

Поскольку математическое ожидание является пределом интегральных сумм, то непрерывный оператор коммутирует с математическим ожиданием. Поэтому $\mathbf{E}[S(t)R^{-1}\xi] = S(t)\,\mathbf{E}[R^{-1}\xi]$, отсюда следует равенство (15).

Перейдем к доказательству равенства (16). Воспользовавшись формулой [12]

$$\mathbf{Cov}[Gu] = G\,\mathbf{Cov}[u]G^*$$

для линейного ограниченного оператора $G = S(t)$ и случайной величины $u = R^{-1}\xi \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$, имеем

$$\mathbf{Cov}[S(t)R^{-1}\xi] = S(t)\,\mathbf{Cov}[R^{-1}\xi]S^*(t). \tag{17}$$

Далее докажем, что если оператор $K(s)$ является оператором Гильберта–Шмидта, то

$$\mathbf{Cov}[W_A(t)] = \int_0^t K(s)QK^*(s)\,ds. \tag{18}$$

Заметим, что интеграл в правой части корректно определен как интеграл Бохнера, так как оператор $K(s)$ является оператором Гильберта–Шмидта [10]. Далее, для любых $h_1, h_2 \in H$ из симметричности ковариационного оператора следует

$$\langle \mathbf{Cov}[u]h_1, h_2\rangle = \mathbf{E}\Big[\langle u - \mathbf{E}[u], h_1\rangle \cdot \langle u - \mathbf{E}[u], h_2\rangle\Big]. \tag{19}$$

Используя это равенство для $u = W_A(t)$, $\mathbf{E}[u] = \mathbf{E}[W_A(t)] = 0$, получаем

$$\langle \mathbf{Cov}[W_A(t)]h_1, h_2\rangle = \mathbf{E}\Big[\Big\langle \int_0^t K(s)dW(s), h_1\Big\rangle \cdot \Big\langle \int_0^t K(s)dW(s), h_2\Big\rangle\Big].$$

По определению интеграла Бохнера и пользуясь непрерывностью скалярного произведения, имеем

$$\langle \mathbf{Cov}[W_A(t)]h_1, h_2\rangle = \mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^n \langle K(s_k)\Delta W_k, h_1\rangle \cdot \sum_{k=1}^n \langle K(s_k)\Delta W_k, h_2\rangle\Big] =$$
$$= \mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^n \langle \Delta W_k, K^*(s_k)h_1\rangle \cdot \sum_{k=1}^n \langle \Delta W_k, K^*(s_k)h_2\rangle\Big].$$

Раскладывая элементы $K^*(s_k)h_1$ и $K^*(s_k)h_2$ в ряд Фурье по некоторой ортонормированной системе $\{e_j\}$ и используя аддитивность скалярного произведения, получаем

$$\langle \mathbf{Cov}[W_A(t)]h_1, h_2\rangle =$$
$$= \mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^n \Big\langle \Delta W_k, \sum_{j=1}^\infty \langle K^*(s_k)h_1, e_j\rangle e_j\Big\rangle \cdot \sum_{k=1}^n \Big\langle \Delta W_k, \sum_{j=1}^\infty \langle K^*(s_k)h_2, e_j\rangle e_j\Big\rangle\Big] =$$
$$= \mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^\infty \Big\langle \Delta W_k, \langle K^*(s_k)h_1, e_j\rangle e_j\Big\rangle \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^\infty \Big\langle \Delta W_k, \langle K^*(s_k)h_2, e_j\rangle e_j\Big\rangle\Big].$$

Выносим число, равное $\langle K^*(s_k)h_1, e_j\rangle$, за скалярное произведение, получаем

$$\langle \mathbf{Cov}[W_A(t)]h_1, h_2\rangle = \mathbf{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\langle K^*(s_k)h_1, e_j\rangle \cdot \langle \Delta W_k, e_j\rangle\Big) \times \\ \times \Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\langle K^*(s_k)h_2, e_j\rangle \cdot \langle \Delta W_k, e_j\rangle\Big)\Big].$$

Объединяем две суммы в одну и, исходя из линейности математического ожидания, имеем

$$\langle \mathbf{Cov}[W_A(t)]h_1, h_2\rangle = \mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\langle \Delta W_k, e_j\rangle^2 \langle K^*(s_k)h_1, e_j\rangle\langle K^*(s_k)h_2, e_j\rangle\Big] = \\ = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{E}[\langle \Delta W_k, e_j\rangle^2]\langle K^*(s_k)h_1, e_j\rangle\langle K^*(s_k)h_2, e_j\rangle.$$

Применяя формулу (19) для $h_1 = h_2 = e_j$, $u = \Delta W_k$, $\mathbf{E}[u] = \mathbf{E}[\Delta W_k] = 0$, мы имеем

$$\langle \mathbf{Cov}[W_A(t)]h_1, h_2\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\langle \mathbf{Cov}[\Delta W_k]e_j, e_j\rangle\langle K^*(s_k)h_1, e_j\rangle\langle K^*(s_k)h_2, e_j\rangle.$$

Так как $\mathbf{Cov}[W(t)] = tQ$, то $\mathbf{Cov}[W_k] = \Delta s_k Q$, а значит

$$\langle \mathbf{Cov}[W_A(t)]h_1, h_2\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\langle Qe_j, e_j\rangle\langle K^*(s_k)h_1, e_j\rangle\langle K^*(s_k)h_2, e_j\rangle\Delta s_k.$$

Учитывая разложение в ряд Фурье элементов $K^*(s_k)h_1$ и $K^*(s_k)h_2$, получаем

$$\langle \mathbf{Cov}[W_A(t)]h_1, h_2\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle QK^*(s_k)h_1, K^*(s_k)h_2\rangle\Delta s_k = \\ = \int_0^t \langle K(s)QK^*(s)h_1, h_2\rangle\, ds,$$

что доказывает равенство (18). Учитывая равенство (17), получаем (16).

Литература

1. Oksendal B. Stochastic Differential Equations. B.: Springer-Verlag; Heidelberg, 1992.

2. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.
5. Мельникова И. В. Полугрупповая регуляризация дифференциальных задач // Докл. РАН. 2003. Т. 393, № 6. С. 744–748.
6. Davies E. B., Pang M. H. The Cauchy problem and a generalization of the Hille–Iosida theorem // Proc. London Math. Soc. 1987. Vol. 3. P. 181–208.
7. Cioranescu I., Lumer G. On K-convoluted senigroups. Recent developments in evolution equations // Pitman Res. Notes in Math. Ser. 324. 1995.
8. Melnikova I. V. Regularized solutions to Cauchy problems well-posed in the extended sense // Integral Transforms and Special Functions. 2006. Vol. 1, № 2. P. 1–8.
9. Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
10. Melnikova I. V., Filinkov A. I., Anufrieva U. A. Abstract stochastic equation I. Classical and generalized solutions // J. Math. Sci. 2002. Vol. 111, № 2. P. 3430–3475.
11. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
12. Федотов А. М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука, 1982.